Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

Option : Spéciales T

Définitions et Notations

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans toute la suite:

- Chaque fois qu'il sera nécessaire $\mathbb{R}^n$, $n>1$, sera muni du repère $(O, (\delta_i)_{1\leq i\leq n})$ où $(\delta_i)_{1\leq i\leq n}$, désigne sa base canonique.

- On désignera par :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n>1$, l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels, $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice unité pour la multiplication des matrices et, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera trA, $détA$ et ${}^tA$ respectivement la trace, le déterminant et la transposée de la matrice A.

$\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

PARTIE A

1. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 - b\lambda + c$.

a) Montrer que P admet au moins une racine réelle.

b) Ecrire a, b, c en fonction des racines λ_1, λ_2 et λ_3 de P.

c) On suppose que les trois racines λ_1, λ_2 et λ_3 de P sont réelles. Montrer que la condition : $\langle a>0,\ b>0$ et $c>0 \rangle$ est équivalente à la condition: $\langle \lambda_1>0, \lambda_2>0$ et $\lambda_3>0 \rangle$

2. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit le polynôme

$P(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 - b\lambda + c$ par $P(\lambda) = dét(A - \lambda I_3)$

a) Ecrire a, b et c en fonction de trA, $détA$ et de doubles produits d'éléments a_{ij} de A.

b) On suppose A telle que $a_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq 3$ et $|a_{23}| < 1$. On pose $\alpha = a_{12}$ et $\beta = a_{13}$.

i) On suppose $c>0$.

- Montrer que pour tout α et β, le point de coordonnées (α, β) est intérieur à une conique (C) dont on déterminera les axes, le centre, les tangentes horizontales et verticales.
- Montrer que $b>0$ et déduire que les valeurs propres de A sont strictement positives.
- Pour $a_{23} = \frac{1}{2}$ représenter graphiquement (C).

ii) On suppose que $a_{23} = \alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Diagonaliser la matrice A dans une base de vecteurs propres orthonormaux.

iii) Résoudre le système différentiel $X'(t) = A \cdot X(t) + B(t)$ où $B(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

PARTIE B

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot , \cdot \rangle$ par :

$$\langle P , Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx \quad \text{pour tout } P \text{ et } Q \text{ de } \mathbb{R}[X]$$

1. Montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_2[X]$, que l'on déterminera, tel que:

pour tout P de $\mathbb{R}_2[X]$ on ait $\langle P , P_0 \rangle = P(0)$.

3. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P_0 de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait $\langle P , P_0 \rangle = P(0)$ pour tout P de $\mathbb{R}[X]$. (Raisonner par l'absurde et calculer la norme de XP_0).

4. On note $A = [a_{ij}]$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \langle X^{i-1} , X^{j-1} \rangle, \text{ pour } 1 \le i \le 3 \text{ et } 1 \le j \le 3 .$$

i) Calculer les a_{ij} et écrire A.

ii) Démontrer, sans les calculer, que les valeurs propres de A sont strictement positives.

5. *On se propose de déterminer, par la méthode dite de Lagrange, la plus petite valeur propre de A.*

Mise en place de la méthode.

Soit f une fonction continue sur $[a , b]$ à valeurs réelles telle que $f(a)f(b)<0$ et telle que f admette un seul zéro α_0 sur $]a , b[$ (autrement dit α_0 est l'unique point de $]a , b[$ tel que $f(\alpha_0) = 0$).

La méthode de Lagrange est une méthode itérative qui consiste à prendre comme première valeur approchée de α_0 le point a_1 de $]a , b[$ obtenu comme intersection de la droite passant par $(a , f(a))$ et $(b , f(b))$ avec l'axe des abscisses $y = 0$.

Si $f(a_1) = 0$ on arrête l'itération.

Si $f(a_1)f(a)<0$ (respectivement $f(a_1)f(b)<0$) on reitère la méthode sur $[a , a_1]$ (respectivement $[a_1 , b]$) pour déterminer une nouvelle valeur aprochée a_2 de α_0.

On arrête la méthode à l'étape i_0 quand a_{i_0} est tel que $f(a_{i_0}) = 0$ ou que l'erreur Δ_{i_0}, $\Delta_{i_0} = |a_{i_0} - \alpha_0|$, est plus petite qu'un certain $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance.

a) On suppose que f est deux fois continûment dérivable sur $[a , b]$ et on pose:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + A_{\alpha_0}(x - a)(x - b) \right] \quad \text{où} \quad A_{\alpha_0} \text{ est une}$$

constante telle que $g(\alpha_0) = 0$.

i) Montrer qu'il existe d_1 de $]a , b[$ tel que $g''(d_1) = 0$ et exprimer A_{α_0} en fonction de $f''(d_1)$.

ii) Calculer $a_1 - \alpha_0$ à partir des formules définissant $g(\alpha_0)$ et a_1 .

iii) Déterminer $sup\{\,|(x-a)(x-b)|\,,\, x\in[a,b]\,\}$.

iv) Déduire que l'erreur $\Delta_1 = |a_1 - \alpha_0|$ est majorée par $\dfrac{(b-a)^3K}{8\,|f(b)-f(a)|}$ où K est une constante que l'on spécifiera.

v) En supposant de plus qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités a_1 et α_0, $\eta \le |f'(x)|$, montrer qu'alors $|a_1 - \alpha_0| \le \dfrac{|f(a_1)|}{\eta}$.

Conclure que dans ce cas $\Delta_1 = |a_1 - \alpha_0| \le min\left(\dfrac{(b-a)^3K}{8\,|f(b)-f(a)|}, \dfrac{|f(a_1)|}{\eta}\right)$.

b) On considère la matrice A définie en 4) ci-dessus et on pose $P(\lambda) = dét(A - \lambda I_3)$.

i) Déterminer les zéros α_1 et α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$, de P' et tracer le graphe de la fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to P(x)$.

ii) On prend $a = 0$ et b une valeur approchée à 10^{-8} près de α_1.

- Après avoir justifié l'utilisation de la méthode de Lagrange définie ci-dessus, déterminer par cette méthode, à 10^{-8} près, la valeur approchée a_1 de α_0, plus petite racine strictement positive de P.

- Donner en utilisant a)iv) une majoration, à 10^{-7} près, de l'erreur $\Delta_1 = |a_1 - \alpha_0|$.

- Poursuivre cette méthode, en donnant à chaque étape i la valeur de a_i (à 10^{-8} près) et $\Delta_i = |a_i - \alpha_0|$ (à 10^{-7} près), jusqu'à ce que l'erreur $\Delta_{i_0} = |a_{i_0} - \alpha_0|$ soit plus petite que 10^{-7}.

6. a) *Préliminaires*

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension $n \ge 1$.

On note par $\langle x,y \rangle$ le produit scalaire de x et y, $x \in E$ et $y \in E$, et $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$.

Soit $(x_i)_{1 \le i \le n}$ une famille libre de vecteurs de E. On appelle famille orthonormalisée de Schmidt, associée à (x_i), la famille de vecteurs définie par:

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad ; \quad e_j = \frac{x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle x_j , e_i \rangle e_i}{\|x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle x_j , e_i \rangle e_i\|} \qquad 2 \le j \le n$$

i) Montrer que la famille $(e_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille libre de vecteurs orthonormaux.

ii) Ecrire l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ sur le sous espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{1 \le i \le n}$.

b) On prend $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini en début de la PARTIE B.

i) Déterminer la base orthonormalisée de Schmidt (e_1, e_2, e_3) associée à la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

ii) Montrer que la matrice S des coordonnées de $1, X, X^2$ dans la base (e_1, e_2, e_3) (appelée aussi racine de Cholewsky de A) est telle que ${}^tS \cdot S = A$.

iii) Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

PARTIE C

On note par E l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ pour tout $f \in E$, $g \in E$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

i) Calculer la norme de f, $\| f \| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

ii) Déterminer la projection orthogonale de f sur le sous-espace engendré par f_1, f_2 et f_3 où, pour tout x, $x \in [0, 1]$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ et $f_3(x) = x^2$.

Dans toute la suite on désigne par E_1 le sous espace engendré par f_1 et f_2.

3. Soit $f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^3 + x^2}$

i) Donner le domaine de définition de f_4 et étudier sa continuité sur $[0, \infty)$

ii) Déterminer la projection orthogonale $pr(f_4) = a_4 f_1 + b_4 f_2$ de f_4 sur E_1 (On exprimera a_4 et b_4 sous forme de sommes de séries numériques).

4. Soit la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n} x^n$.

i) Déterminer le rayon de convergence R de cette série et étudier son comportement en $x = R$ et $x = -R$.

ii) Montrer que la série est uniformément convergente sur $[0, 1]$.

iii) On définit la fonction f_5 par $f_5(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n} x^n$.

Montrer que f_5 est élément de E.

iv) Déterminer la projection orthogonale $pr(f_5) = a_5 f_1 + b_5 f_2$ de f_5 sur E_1 (On exprimera a_5 et b_5 sous forme de sommes de séries numériques).